Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3 Μάρτιος 2016, Ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυώνυμο

1. Ποιές συνθήκες πρέπει να πληρούν οι αριθμοί a, b, c, d, e, f έτσι ώστε η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με τύπο
$$T(x, y, z, w) = (3x + ay + bz + cw, 3y + dz + ew, 4z + fw, 4w)$$
να είναι διαγωνίσιμη;

2. Ποιές συνθήκες πρέπει να πληρούν οι a, b ώστε η γραμμική απεικόνιση με τύπο
$$T(x, y, z) = (2x, 2y + az, 3x + bz)$$
να είναι διαγωνίσιμη;

3. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Με την βοήθεια του Θεωρήματος Cayley-Hamilton, να υπολογίσετε τον πίνακα
$$D = C^{23} - 3C^{22} - 4C^{21} + 10C^{20} - C^6 + 3C^5 + 4C^4 - 11C^3 + 4C^2 + 5C + I_3.$$

4. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
και στη συνέχεια
   - με την βοήθεια του θεωρήματος των Cayley-Hamilton δείξτε ότι $E^n = E^{n-2} + E^2 - I_3$ για κάθε φυσικό $n \geq 3$,
   - υπολογίστε τον πίνακα E^{100},
   - βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα E.

5. Βρείτε πίνακες X και Y τέτοιους ώστε
$$X^2 = Y^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Μάθημα : 9ο — Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ — 24/3/2016

Ασκ: 5 φυλλάδιο #3

<u>Άσκηση:</u> Βρείτε πίνακες X και Y τέτοιους ώστε να ισχύει:

$$X^2 = Y^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circledast$$

πχ. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$

↳ έχω ουσιαστικά 8 πίνακες.

$\circledast$ Όταν ο πίνακάς μου δεν είναι διαγώνιος χρησιμοποιώ τους διαγωνίσιμους πίνακες

!! Ένας πίνακας $A \in K^{n \times n}$ είναι διαγωνίσιμος αν:

(i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_A(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων, δηλαδή:

$$X_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{n_1} (x-\lambda_2)^{n_2} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k} \quad \text{με } \lambda_i \neq \lambda_j$$

(ii) Και η διάσταση του ιδιοχώρου να είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα:

$$\dim V(\lambda_i) = n_i$$

γεωμετρική πολλαπλότητα ← $\dim V(\lambda_i)$, n_i → αλγεβρική πολλαπλότητα

Ονομάζω $A = X^2 = Y^3$ και βρίσκω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ⟶

(i) $\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} 9-x & 0 & 0 \\ -5 & 4-x & 0 \\ -8 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 9-x & 0 & 0 \\ -5 & 4-x & 0 \\ -8 & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$

$\det(A-xI)$ ↳ κάτω τριγωνικός

$= (9-x)(4-x)(1-x) = -(x-9)(x-4)(x-1)$

(ii) Ιδιοτιμές 9,4,1.

Για κάθε λύση → $\dim V(\lambda_i) = n_i$

Ισχύει πάντα ότι $1 \le \dim V(\lambda_i) \le n_i$ → θεώρημα

Αν $n_i = 1$ (αλγεβρική πολλαπλότητα) τότε (ταύτουτς)
$1 \le \dim V(\lambda_i) \le 1$. άρα έχει αναγκαστικά μία τιμή
$\dim V(\lambda_i) = 1$

!! Αν ένας πίνακας $A \in K^{n\times n}$ έχει ακριβώς n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές, τότε είναι διαγωνίσιμος

(πχ) 5×5 πίνακας με 5 ιδιοτιμές ⇒ διαγωνίσιμος

Άρα ο πίνακας A είναι 3×3 και έχει 3 ιδιοτιμές (9,4,1) άρα είναι διαγωνίσιμος.

Βρίσκω τους ιδιοχώρους: → λύνοντας σύστημα (επαυξημένος)

(α) $V(9) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big/ (A-9I)\begin{pmatrix} \pm 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 9-9 & 0 & 0 \\ -5 & 4-9 & 0 \\ -8 & 0 & 1-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Άρα έχω:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 \to -\frac{1}{5} r_2 \\ r_3 \to -\frac{1}{8} r_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$

$$\triangleright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to -\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Αν έβρισκα ακόμα μια αρχική μονάδα θα είχα κάνει λάθος γιατί πρέπει να μου βγει μια αρχική μονάδα.

Επομένως,
$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ y-z=0 \\ z=t \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-t \\ y=t \\ z=t \end{array} \quad \text{με } t\in\mathbb{R}$$

Άρα έχουμε τον ιδιοχώρο $V(9) = \left\{\begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\} = \left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(β) $V(4) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 9-4 & 0 & 0 \\ -5 & 4-4 & 0 \\ -8 & 0 & 1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Άρα έχω:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2]{\Gamma_1 \to \frac{1}{5}\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 8\Gamma_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

Άρα $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \\ y=t \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ y=t \\ z=0. \end{array}$

$$V(4) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t\in\mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(γ) $$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, (A-1I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 9-1 & 0 & 0 \\ -5 & 4-1 & 0 \\ -8 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Έχω: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 \to r_2 + 5r_1 \\ r_3 \to r_3 + 8r_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) r_3 \to \tfrac{1}{3} r_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=t. \end{array}$$

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t\in\mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Άρα ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος

$$[L_A]_a^a = [I]_\varepsilon^a [L_A]_\varepsilon^\varepsilon [I]_a^\varepsilon$$

ε η κανονική βάση.
$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
του χώρου των στηλών

a βάση των ο πίνακας να είναι διαγώνιος:

$$a = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[L_A]_a^a = [I]_\varepsilon^a [L_A]_\varepsilon^\varepsilon [I]_a^\varepsilon .$$

Τα ιδιοδιανύσματα είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους.

$$a = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ → ιδιοδιάν. που αντιστοιχεί στην ιδιοτ. 1.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → ιδιοδιαν. που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 4.

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ → ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 9

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{*} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$[I]_\varepsilon^a$ → προκύπτει γράφοντας την βάση ε στην α.

$[I]_a^\varepsilon$ → προκύπτει γράφοντας την βάση α στην κανονική βάση.

$$* \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ k+\lambda \\ k+\mu \end{pmatrix}$$

Λύνω το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} -k &= 1 \\ k+\lambda &= 0 \\ k+\mu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} k &= -1 \\ \lambda &= 1 \\ \mu &= 1 \end{aligned}} \to 1^{\eta} \text{ στήλη}$$

(iii) Βρίσκω τους πίνακες X και Y.

Έχω ότι $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Μία από τις 8 επιλογές)

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}9&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{=P^{-1}} A \underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{=P}$$

Οι πίνακες P, P^{-1} ταυτίζονται.

Έχω, λοιπόν, $P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2 P^{-1} = A \xrightarrow{} PP^{-1}\cdot A\cdot PP^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)^2 = A \Rightarrow \left(P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdot\left(P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right) = A$$

Άρα $X = \left(P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)$

Επίσης,

$$\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9}&0&0\\0&\sqrt[3]{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}9&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{=P^{-1}} A \underbrace{\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{=P}$$

Έχω, λοιπόν, $P\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9}&0&0\\0&\sqrt[3]{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}^3 P^{-1} = A \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9}&0&0\\0&\sqrt[3]{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{P^{-1}P}{\downarrow}\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9}&0&0\\0&\sqrt[3]{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{P^{-1}P}{\downarrow}\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9}&0&0\\0&\sqrt[3]{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1} = A$$

Άρα $Y = \left(P\begin{pmatrix}\sqrt[3]{9}&0&0\\0&\sqrt[3]{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}\right)$ γιατί έχω αυτόν τον πίνακα πολλαπλασιασμένο με τον εαυτό του 3 φορές

Άσκηση 1, φυλλάδιο #3.

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$T(x,y,z,\omega) = (3x + ay + bz + c\omega,\ 3y + dz + e\omega,\ 4z + f\omega,\ 4\omega)$$

a,b,c,d,e,f ? ώστε T διαγωνίσιμη.

Επομένως, T διαγωνίσιμη. άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $X_T(x)$ της απεικόνισης T είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων.

$$X_T(x) = \det\left([T]_\varepsilon^\varepsilon - xI\right)$$

με $\varepsilon = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$

Όποτε έχω ελευθερία επιλογής βάσης, διαλέγω την πιο εύκολη για τις πράξεις μου. άρα την κανονική βάση

$$[T]_\varepsilon^\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & a & b & c \\ 0 & 3 & d & f \\ 0 & 0 & 4 & e \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$T(1,0,0,0) = (3,0,0,0)$ το γράφω στην κανονική βάση.

$T(0,1,0,0) = (a,3,0,0)$ το γράφω στην κανονική βάση.

... κτλ ...

$$X_T(x) = \det\left([T]_\varepsilon^\varepsilon - xI\right) = \begin{vmatrix} 3-x & a & b & c \\ 0 & 3-x & d & f \\ 0 & 0 & 4-x & e \\ 0 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} =$$

άνω τριγωνικός άρα η det είναι το γινόμενο της στοιχείων της διαγωνίου

$$= (3-x)(3-x)(4-x)(4-x) = (3-x)^2(4-x)^2$$

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές 3 (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2) και 4 (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2)

→ →

Ισχύει ότι:

T διαγωνίσιμος $\Rightarrow$ γεωμετρική πολλαπλότητα = αλγεβρική πολλαπλότητα για κάθε ιδιοτιμή.

Επομένως $\boxed{\dim V(3)=2}$ και $\boxed{\dim V(4)=2}$.

Έχουμε τον πίνακα: $[T]^{\varepsilon}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & a & b & c \\ 0 & 3 & d & e \\ 0 & 0 & 4 & f \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

!! Μια απεικόνιση είναι διαγωνίσιμη αν ο πίνακας της απεικόνισης, σε οποιαδήποτε βάση είναι διαγωνίσιμος.

Βρίσκω τους ιδιοχώρους των ιδιοτιμών 3 και 4 αντίστοιχα:

(a) $V(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \left([T]^{\varepsilon}_{\varepsilon} - 3I\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Η διάσταση του χώρου των λύσεων ενός ομογενούς συστήματος είναι $n - \text{rank}A$ (όπου n άγνωστοι)

Έχουμε $4 - \text{rank}(A-3I) = 2$.

$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2. \Rightarrow \boxed{a=0} \longrightarrow$

Προκύπτει ότι το $a=0$ γιατί με γραμμοπράξεις προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

άρα αρκεί $a=0$ για να έχω βαθμίδα 2, αφού η βαθμίδα ισούται με τον αριθμό των αρχικών κεφαλών του πίνακα.

(β) $V(4) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \left([T]^{\varepsilon}_{\varepsilon} - 4I \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Άρα $\operatorname{rank}(A-4I)=2$. γιατί η διάσταση του χώρου των λύσεων ενός ομογενούς συστήματος είναι $n-\operatorname{rank} A$ όπου εδώ $4-\operatorname{rank}(A-4I)=2$.

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Η T είναι διαγωνίσιμη αν-ν $a=f=0$, που προκύπτει με τον ίδιο τρόπο

$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \in K[x]$

$a_0 \cdot 1$

Αν έχω $A \in K^{n\times n}$, τότε έχω

$$g(A) = a_0 \cdot I_{n\times n} + a_1 \cdot A + \dots + a_m A^m \in K^{n\times n}$$

$f: V \to V$ $\quad g(f) = a_0 I_V + a_1 f_1 + \dots + a_m f^m$

f γραμμική

ταυτοτική απεικόνιση του V

$V \xrightarrow{I_V} V$

$f^m = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{m \text{ φορές}}$

$A = [f]_a^a \quad , \quad [g(f)]_a^a = g(A)$

<u>Ερώτηση</u>

▶ Υπάρχει πολυώνυμο $g(x) \in K[x]$ μη-μηδενικό των $g(A) = O_{n\times n}$?

$\dim(K^{n\times n}) = n^2$

$I_{n\times n}, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$ όλοι αυτοί οι πίνακες είναι σε πλήθος n^2+1

Άρα αυτά τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα γιατί είναι n^2+1 διανύσματα σε χώρο διάστασης n^2, άρα γ.ε.

Άρα $\exists \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}$ με <u>τουλάχιστον</u> ένα από αυτά διάφορο του μηδενός τέτοια ώστε:

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \dots + \lambda_{n^2} A^{n^2} = O_{n\times n}$$

Άρα $\exists$ πολυώνυμο $g(x) \in K[x]$ μη-μηδενικό με $g(A) = O_{n\times n}$

$g(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_{n^2} x^{n^2}$ με $g(x) \neq 0$ γιατί 1 τουλάχιστον συντελεστής $\neq 0$ και $g(A) = 0$

Έστω $m_A(x) \in K[x]$ τέτοιο ώστε:

(i) Το $m_A(x)$ είναι μονικό (δλδ ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι το 1)

(ii) $m_A(A) = O_{n\times n}$

(iii) Το m_A έχει ελάχιστο βαθμό (δλδ αν $g(x) \neq 0$ είναι τέτοιο ώστε $g(A) = 0$ τότε $\deg(g(x)) \geq \deg(m_A(x))$)

Το $m_A(x)$ ονομάζεται ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A.

Πρόταση: Έστω $g(x) \in K[x]$ τέτοιο ώστε το $g(A) = O_{n\times n}$ τότε $m_A(x) \mid g(x)$ (το $m_A(x)$ διαιρεί το $g(x)$)

απόδειξη:

$g(A) = O_{n\times n}$

Για να αποδείξω ότι ένα πολυώνυμο διαιρεί ένα άλλο, τα διαιρώ:

$g(x) = q(x)\cdot m_A(x) + r(x)$ από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο

όπου $r(x) = 0$ ή $\deg(r(x)) < \deg(m_A(x))$ ⊛

με $q(x)$ πηλίκο και $r(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης

⊛ Έχω τις εξής περιπτώσεις:

(1) $r(x) \neq 0$

Άρα $\deg r(x) < \deg(m_A(x))$

$g(A) = 0$, άρα:

$q(A)\cdot m_A(A) + r(A) = O_{n\times n}$

με $m_A(A) = O_{n\times n}$ και

Επομένως $r(A) = O_{n\times n}$ και $\deg(r(x)) < \deg(m_A(x))$

Άτοπο στον ορισμό του ελάχιστου πολυωνύμου

(2) $r(x) = 0$

Ισχύει η δεύτερη περίπτωση αφού η (1) → άτοπο.

Έχουμε λοιπόν, $r(x) = 0$ και άρα:

$g(x) = q(x) m_A(x) \Rightarrow m_A(x) \mid g(x)$

Θεώρημα (Cayley-Hamilton): Έστω $A \in K^{n\times n}$ τότε $\chi_A(A) = O_{n\times n}$
(οποιοσδήποτε πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο)

Πόρισμα: $m_A(x) \mid \chi_A(x)$. (Το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο)

* * * * *

▶ Να βρεθεί το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}}_{\text{κάτω τριγωνικός}} = (-1-x)(1-x)(1-x) =$$
$$= \underbrace{-(x-1)^2(x+1)}_{\text{χαρακτηριστικό}}$$

$m_A(x) \mid \chi_A(x)$

$$m_A(x) \in \{\cancel{1}, \cancel{(x-1)}, (x+1), (x-1)^2, (x-1)(x+1), (x-1)^2(x+1)\}$$

αιτιολόγηση στο επόμενο μάθημα